

Abstract

In this work, the foundations for the establishment of an alternative version of the real analysis are shown, based on the conception of $\mathbb{R}$ as a discontinuous numerical set. In a first phase, the two fundamental assumptions that support the classical paradigm of continuity of real numbers, are examined, consisting of the conception of the geometric line as a set of discrete points, and in the equipotence of its points with $\mathbb{R}$. For this purpose, theoretical tools of the hyperreal numbers, $\mathbb{R}^*$, and some superdensity properties of sets, are used. The analysis carried out allows us to derive certain evidences that suggest that these assumptions are rather inconsistencies, which calls into question the construction of $\mathbb{R}$, by Richard Dedekind, as a continuous numerical set, and makes us presume its discontinuity. In this sense, and in line with the above, some generalizations of the definitions of limit and derivative are proposed, in order to establish a basic theoretical platform for a real analysis model, in a discontinuity scenario of $\mathbb{R}$.

Keywords: Continuity, discontinuity, real numbers, hyperreal numbers.

Resumen

En este trabajo, se muestran los fundamentos para el establecimiento de una versión alternativa del análisis real, teniendo como base la concepción de $\mathbb{R}$ como conjunto numérico discontinuo. En una primera fase se examinan, los dos supuestos fundamentales que sustentan el paradigma clásico de continuidad de los números reales, consistentes en la concepción de la recta geométrica como un conjunto de puntos discretos, y en la equipotencia de los puntos de esta con $\mathbb{R}$. Para tal fin, se utilizan herramientas teóricas de los números hiperreales, $\mathbb{R}^*$, y algunas propiedades de superdensidad de conjuntos. El análisis realizado permite derivar ciertas evidencias que hacen pensar que estos supuestos son más bien inconsistencias, lo cual ponen en tela de juicio la construcción de $\mathbb{R}$, por parte de Richard Dedekind, como conjunto numérico continuo, y hacen presumir su discontinuidad. En tal sentido, y en consonancia con lo anterior, se proponen unas generalizaciones de las definiciones de límite y derivada, con el fin de establecer una plataforma teórica básica para un modelo de análisis real, en un escenario de discontinuidad de $\mathbb{R}$.

Palabras clave: Continuidad, discontinuidad, números reales, números hiperreales.

El sistema de los números reales $\mathbb{R}$, como conjunto numérico discontinuo

(The system of real numbers $\mathbb{R}$, as a discontinuous number set)

Cruz Suárez

Universidad Politécnica Territorial del Oeste de Sucre
“Clodosbaldo Russián”

csuarez97@hotmail.com

Recibido: 21/03/2021; Aceptado: 26/07/2021

1. Introducción

La aritmetización del análisis fue un proceso realizado por algunos matemáticos a finales del siglo XIX, consistente en elaborar una teoría de números reales usando construcciones teóricas de conjuntos, con el fin de darle una base sólida y aritmética al análisis, el cual tradicionalmente sentaba sus bases teóricas y metodológicas en la geometría, la cual fungía como instrumento matemático ideal para la descripción del movimiento de los cuerpos, en el marco de un tiempo y espacio continuos, tal como lo concebían en el siglo XVII sus fundadores, Isaac newton (1642-1727) y Wilhem Leibnitz (1646-1716). Así, el problema central de este esfuerzo consistió en dotar de algún tipo de “continuidad” al sistema numérico, esencial y ontológicamente discreto, y de esa manera deslastrarse e independizarse de los métodos geométricos del análisis tradicional.

Entre los matemáticos más representativos del mencionado movimiento destacan Bolzano (1781-1848), Cauchy (1789-1857), Weierstrass (1815-1897) y muy particularmente Richard Dedekind (1831-1916) y Georg Cantor (1845-1918), los cuales le dan culminación. Con todo, el naciente movimiento no estuvo exento de críticas y polémicas, entre las cuales destacan las manifestadas, de acuerdo a Bell (2000), por Hermann Weyl (1885-1955) y Luitzen Brouwer (1881-1966), entre otros, que advertían sobre la existencia de algunas debilidades, contradicciones e inconsistencias en la teoría resultante.

En efecto, en la citada obra, L. Brouwer señalaba que, el continuo “*no se disuelve en un conjunto de números reales como entidades terminadas.*”, y que este, “*no es la unión de dos partes no vacías disjuntas...*”, pg. 9. Por su parte, H Weyl, indicaba que, “*una auténtica continuidad no se puede dividir en fragmentos separados.*” y que el continuo, “*...desafía ser cortado en partes con un hacha.*”, pg. 9. No obstante, y a pesar de lo acertado de los señalamientos de Brouwer y Weyl, al carecer de argumentos sólidos y rigurosos de carácter matemático, aquellos no pudieron trascender la etapa de la simple crítica filosófica, por lo que no fueron considerados como evidencias poderosas, para inducir una pertinente revisión crítica a la teoría clásica de continuidad de los números reales.

Una de las consecuencias de la aritmetización del análisis, por otra parte, fue la eliminación definitiva del uso de los números infinitesimales leibnitzianos, los cuales a pesar de su gran utilidad y versatilidad en la resolución de problemas de análisis, cálculo de derivadas y series, entre otras aplicaciones, carecían sin embargo del rigor y formalismo necesarios para ser admitidos legítimamente en las nuevas matemáticas de finales del siglo XIX y principios del XX. Sin embargo, todo empezó a cambiar a partir de 1961 cuando Abraham Robinson (1918-1974), realiza la construcción de los números hiperreales $\mathbb{R}^*$, lo cual constituyó el resurgimiento de los números infinitesimales e infinitos, con la particularidad de que ahora lo hacían con todo el rigor y legitimidad necesarios, según las exigencias de la matemática moderna, “*...abriendo...una imprescindible reinterpretación de la matemática clásica y la posibilidad de esclarecer los problemas no resueltos por la misma.*”, Takeuchi (1998), pg. 8. Ahora las bases teóricas sobre las que se sustenta el modelo de continuidad y completitud clásico, y que motivaron las protestas de Weyl y Brouwer en su momento, podían examinarse desde una óptica más amplia y con

herramientas más potentes, con todo el rigor y legalidad necesarios.

En tal sentido en el presente trabajo, utilizando herramientas de la teoría de los números hiperreales, así como algunas de sus propiedades de superdensidad, se estudian en primer término, los dos supuestos que constituyen los pilares teóricos sobre los que se basa el análisis real moderno, como son la concepción de la recta geométrica como un conjunto de puntos y la equipotencia entre los números reales y los puntos sobre la recta. Bajo este análisis se pone en evidencia que ambos supuestos constituyen en realidad dos anomalías estrechamente relacionadas, poniendo así en cuestionamiento la continuidad de los números reales y la teoría inherente, justificando en tal sentido de forma muy natural, la emersión de un modelo alternativo de los números reales como cuerpo discontinuo. En la segunda parte del trabajo y como consecuencia directa de lo anterior, se aborda la elaboración de una plataforma conceptual como fundamento para un análisis real discontinuo alternativo, que involucraría la generalización de las definiciones de límite y derivada, entre otros.

Por otra parte, hay que destacar que el presente trabajo no sólo reviste interés para el desarrollo de la matemática como ciencia, en tanto que coadyuva a la revisión y corrección de sus bases teóricas y metodológicas a la luz de los nuevos avances y descubrimientos, sino también para otros sectores de la ciencia, que podrían servirse de las aplicaciones prácticas que un análisis real discontinuo pudiese aportar.

En efecto, como ya es sabido, los orígenes del cálculo en el siglo XVII tuvieron como fundamento filosófico la concepción de un Universo estable y regido por leyes determinísticas, donde el tiempo, el espacio y el movimiento de los cuerpos se consideraban esencialmente continuos; de allí la imperiosa necesidad de la utilización de la geometría como herramienta descriptiva de sus procesos. Así, Newton, por su parte, interpretaba la derivada, su problema fundamental,

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

como la pendiente de la recta en un punto, donde Δy y Δx son segmentos de un triángulo rectángulo, estableciendo así la base geométrica (continua) del análisis. En este sentido es

importante destacar que Newton imaginaba las curvas como fluentes (lo que fluye), lo que indujo a que llamara a la derivada “fluxión”. Por su parte, Leibnitz consideraba a las curvas como formadas por tramos rectos o segmentos infinitamente pequeños, coincidiendo de esta manera con Newton en cuanto a la concepción de la naturaleza geométrico-continua del análisis.

De manera que esta creencia generalizada en la continuidad de los fenómenos del Universo, como se acaba de señalar, coadyuvó a la creación, en el siglo XVII, de un modelo matemático de carácter geométrico. Estas dos concepciones, fenoménica y matemática, fueron heredadas por los fundadores de la aritmetización del análisis, a finales del siglo XIX, con la particularidad de que estos últimos arremetieron contra la concepción geométrica matemática original, dejando incólume, no obstante, la cosmovisión fenoménica de naturaleza continua, que le sirvió de fundamento, con las consecuencias ya descritas. Sin embargo, el hecho cierto es que la continuidad del tiempo, el espacio y el movimiento, es sólo aparente, como lo evidencian los resultados y descubrimientos emanados de la física cuántica y relativista, por lo que el clásico “análisis real continuo”, se muestra inapropiado para abordar y describir de forma pertinente tales procesos. En consecuencia, la necesidad de revisar los fundamentos de la teoría clásica de continuidad y de implementar una teoría alternativa de discontinuidad, se encuentra doblemente justificada, no solo por las debilidades epistemológicas inherentes en la teoría, sino porque la misma no constituye una herramienta adecuada e idónea para describir y modelar un universo y sus fenómenos esencialmente discontinuos.

2.- Definiciones y resultados previos

Las definiciones y resultados que se muestran a continuación fueron tomados de Takeuchy (1988) y Goldblatt (1998):

Definición 2.1.- Un número hiperreal α básicamente es una clase de equivalencia de las sucesiones de números reales “casi iguales” o “iguales para casi todo n ”. Así, el número hiperreal $\alpha = [(a_n)]$, se define como $\alpha = [(a_n)] = \{(b_n) \text{ en } T / (a_n) \text{ y } (b_n) \text{ son casi iguales}\} = \{(b_n) \text{ en } T / (a_n) \equiv (b_n)\}$.

El conjunto de todos los números hiperreales se denota por $\mathbb{R}^*$, y se encuentra

conformado por todas las clases de equivalencias descritas arriba. En particular, $\mathbb{R}^*$ incluye a $\mathbb{R}$ como subconjunto propio, así como a los números infinitesimales e infinitos hiperreales. $\mathbb{R}^*$ es un cuerpo totalmente ordenado con las operaciones usuales.

Observación.- Sea r en $\mathbb{R}$, entonces $r = [(r)] = [(r, r, r, \dots, r, \dots)]$, es el número hiperreal r generado por la sucesión constante (r) . De esta manera, r es a su vez un número real e hiperreal y así se deduce que $\mathbb{R}$ es un subconjunto de $\mathbb{R}^*$. En particular, $1 = [(1, 1, 1, \dots)]$ y $0 = [(0, 0, 0, \dots)]$.

Definición 2.2.- Sea α en $\mathbb{R}^*$, entonces α es un número infinitesimal si y sólo si $|\alpha| < k$, para todo real positivo k .

Un caso particular de número infinitesimal, lo constituye $\alpha = [(1/n)] = [(1, 1/2, 1/3, \dots, 1/n, \dots)]$. En efecto, sea k un número real positivo, entonces por el principio de Arquímedes, existe un número natural n tal que $1/n < k$. Así $1/n < k$ para casi todo n natural, por lo tanto $\alpha = [(1/n)] < k$, para todo real positivo k y por ende α es un número infinitesimal. En general, todo número infinitesimal $\alpha = [(a_n)]$, tal que (a_n) converge a cero, representa un infinitesimal. Por otra parte, 0 es el único número infinitesimal real.

Definición 2.3.- Sean x, y en $\mathbb{R}^*$, se dice que x es infinitamente próximo a y , $x \approx y$, si y sólo si $x - y$ es infinitesimal.

Se puede verificar fácilmente que los números $1 = [(1, 1, 1, \dots)]$ y $\beta = [(\frac{1+n}{n})]$ son infinitamente próximos, es decir $1 \approx \beta$. (Basta comprobar que $\beta - 1 = [(1/n)] = [(1, 1/2, 1/3, \dots, 1/n, \dots)]$).

Definición 2.4.- Sea α en $\mathbb{R}^*$, se define el *halo* de α , $\text{hal}(\alpha)$ como:

$$\text{hal}(\alpha) = \{x \text{ en } \mathbb{R}^* / x \approx \alpha\}.$$

El halo de un número α está formado por todos los números infinitamente próximos a α . En particular, $\text{hal}(0) = \{x \text{ en } \mathbb{R}^* / x \approx 0\}$, es el conjunto de los números infinitesimales

hiperreales.

El halo de α , $\text{hal}(\alpha)$, es un conjunto acotado, carente sin embargo de supremo, ínfimo, máximo y mínimo. Además su cardinalidad, bajo la hipótesis del continuo, es igual a la cardinalidad de $\mathbb{R}$, es decir $\aleph_1$.

Definición 2.5.- Sea X un conjunto totalmente ordenado, se dice que X es superdenso si dados A, B dos subconjuntos numerables de X , no simultáneamente vacíos, con $A < B$, existe siempre c en X tal que $A < \{c\} < B$.

Teorema 2.1.- El cuerpo $\mathbb{R}^*$ de los números hiperreales es un conjunto superdenso.

Propiedades de los conjuntos superdensos:

1. Un conjunto superdenso es denso.
2. Si X es superdenso, entonces X no es numerable.
3. Un conjunto superdenso no posee ni máximo ni mínimo elemento.
4. Sea X un conjunto superdenso y S un subconjunto numerable de X ; entonces S no tiene supremo (ínfimo) diferente al máximo (mínimo, respectivamente).
5. Si X es un conjunto superdenso, entonces toda sucesión de elementos de X es acotada.
6. Un conjunto superdenso no es completo.

En particular $\text{hal}(\alpha) = \{x \text{ en } \mathbb{R}^* / x \approx \alpha\}$ es un conjunto superdenso.

Teorema 2.2.- El conjunto de los números hiperreales $\mathbb{R}^*$ no es completo.

Del teorema 2.2 se desprende que $\mathbb{R}^*$ es un cuerpo discontinuo.

3.- Las anomalías o inconsistencias del modelo clásico de continuidad de $\mathbb{R}$

“El descubrimiento comienza con la percepción de la anomalía” Thomas Kuhn (1922-1996)

A continuación se muestra que los dos supuestos básicos que fundamentan la teoría

clásica de $\mathbb{R}$, son en realidad anomalías de bajo y alto nivel, respectivamente, poniendo de manifiesto la naturaleza esencialmente discontinua de $\mathbb{R}$.

3.1.- La concepción de la recta geométrica como un conjunto de puntos discretos

Se puede comprobar que esta errada concepción de la recta como un conjunto de puntos ya se conocía desde la antigüedad, pues Euclides en sus “Elementos” la define de esa manera, pasando luego al transcurrir del tiempo a la Geometría Analítica, hasta llegar a nuestros días sin modificación sustancial. Estos puntos de los que supuestamente se compone la recta se consideran de carácter adimensional y sirven para fijar la posición entre los extremos de un segmento sobre la recta. Pero sea que se conciban como meras posiciones sobre la recta o no, lo cierto es que esas posiciones o puntos no pueden abarcar toda la recta geométrica como un todo, pues un verdadero continuo no se puede fraccionar hasta desembocar en una parte mínima.

En efecto, supongamos que la recta geométrica se puede estructurar como la unión de puntos discretos adimensionales. Ahora bien, por la esencia misma de continuidad no deben existir huecos entre ningún par de puntos distintos, digamos A y B. Pero esto significa que la distancia entre A y B es cero, por lo que A y B deben ocupar la misma posición, y así $A = B$, lo cual es una contradicción.

De acuerdo a lo anterior y profundizando un poco más sobre la situación descrita, se deduce que los puntos que supuestamente estructuran la recta geométrica, se encuentran separados de su entorno por dos huecos laterales de longitud mayor que cero, evidenciando así que la recta geométrica (el verdadero continuo), no puede ser llenada por puntos:

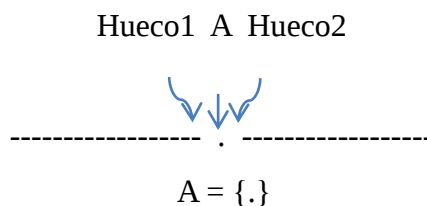


Fig. 3.1

La descripción anterior corrobora las afirmaciones de Weyl y Brouwer, poniendo en evidencia la imposibilidad, de naturaleza onto-matemática, de establecer una genuina continuidad

en términos de uniones de objetos discretos, pues siempre existirán huecos que llenar. Sin embargo, lo que hizo restarle importancia a la anomalía fue, muy probablemente, el hecho de que estos huecos, a pesar de tener una longitud mayor que cero, no podían ser caracterizados por ningún número real, pues podían concebirse tan pequeños como se quisiera, de tal manera que para todo efecto práctico, se consideraron como inexistentes. Otra razón es la gran utilidad que representa la concepción de la recta como conjunto de puntos, pues sirvió no sólo de fundamento para la geometría analítica, sino también como valiosa herramienta para efectos de los cálculos y aplicaciones en otras ciencias.

Así, la anomalía subyacente descrita no se consideró importante ni existía el peligro de que amenazara algún supuesto general aceptado por la matemática. En tal sentido se puede considerar como una anomalía con un nivel de gravedad leve. No obstante, sirvió de fundamento para la emersión de la siguiente anomalía, que paradójicamente constituye uno de los pilares teóricos fundamentales sobre los que se basa el actual análisis real, siendo precisamente esa razón por la que posee un nivel de gravedad dramáticamente mayor. En otras palabras, estaríamos constatando que el análisis real moderno se edificó sobre una equivocación.

3. 2.- La "equipotencia" de los puntos sobre la recta geométrica con los números reales

"El análisis está edificado sobre arena" "Cada célula de este poderoso organismo (por así decirlo) está permeado por la contradicción"
H. Weyl (1885-1955)

Una cosa es considerar a la recta geométrica constituida por puntos discretos, y otra muy distinta, aun de mayor gravedad, es asumir que a cada número real le corresponde un punto de la misma y viceversa, por cuanto se trataría de un proceso constructivo doblemente anómalo, pues estaría constituido por la conjunción de dos anomalías. Sin embargo este supuesto fue el asumido por Richard Dedekind y Georg Cantor, el cual les sirvió como base teórica fundamental para establecer, el primero mediante cortaduras de números racionales, y el segundo a través de la convergencia de sucesiones de Cauchy, la continuidad de los números reales.

En lo que respecta a Dedekind (1927), este consideraba, violentando la naturaleza ontológica de una auténtica continuidad, que: El discontinuo se puede hacer continuo "...rellenando...sus huecos...mediante la creación de nuevos individuos puntuales..." pg. 6.

Sin duda, Dedekind llegó a esta conclusión basándose en la experiencia cotidiana, donde los espacios materiales existentes entre dos objetos físicos, parecen ser llenados por otros objetos materiales de la misma naturaleza. Esto lo llevó a generalizar la experiencia hacia los objetos ideales, en este caso puntos y números, suponiendo que las cosas debían funcionar de forma semejante. Sin embargo, de inmediato surgen diferencias esenciales. Por ejemplo, la propiedad de densidad, por la cual siempre es posible encontrar, entre dos objetos distintos, otro objeto de la misma naturaleza, la cumplen los números racionales e irracionales (ambos discontinuos), pero no procede a nivel de los objetos físicos.

De manera que para Dedekind, el continuo se puede construir a partir de un discontinuo original, simplemente mediante la adición de nuevos objetos, hasta completar el llenado de los huecos existentes. El problema es ¿Cómo saber cuándo parar de agregar objetos o si éstos serán suficientes para llenar los huecos existentes? Ciertamente, a nivel de la experiencia cotidiana, del mundo material, es factible en general, dar con la solución. Sin embargo, a nivel ideal, puntual o numérico, la solución en general no es sencilla, de hecho cae bajo el dominio de la especulación y la subjetividad, por lo que se podrían barajar múltiples hipótesis, cada una con igual probabilidad de ocurrencia. Así, para el caso que nos ocupa, Dedekind asumió, de forma apriorística e implícitamente axiomática, la existencia del infinito actual, Ferreirós (1998), lo que lo llevo a concluir que:

1.- Los huecos existentes en el conjunto de los números racionales, $\mathbb{Q}$, podían ser llenados con los elementos del conjunto de los números irracionales, I , y viceversa. En tal sentido, la unión de $\mathbb{Q}$ e I , o conjunto de los números reales, $\mathbb{R}$, se constituyó bajo el supuesto de que las continuidades numéricas o puntuales se comportan de forma análoga a las materiales.

2.- Se asumió, también de forma apriorística y especulativa, que existían tantos números reales como puntos en la recta geométrica.

Los aspectos mencionados en 1 y 2, constituyen el núcleo duro de la anomalía 2, y como se ve, se encuentra sustentada sólo en conjeturas y en la anomalía 1. Finalmente, basándose en los supuestos 1 y 2, Dedekind afirma haber hallado la esencia de la continuidad, que en la citada

obra describe de la siguiente manera:

“Encuentro la esencia de la continuidad en el siguiente principio: Si se reparten todos los puntos de la recta en dos clases, tales que cada punto de la primera clase está situado a la izquierda de cada punto de la segunda clase, entonces existe un único punto que determina esta partición de todos los puntos en dos clases, este corta a la recta en dos partes.” (pgs. 6-7)

Así, se hizo corresponder la continuidad geométrica, la verdadera continuidad, con la continuidad aritmética o continuidad aparente, trasladando así la anomalía original al campo numérico, solo que en este caso la anomalía generada presenta mayor nivel de gravedad, como se verifica continuación.

En efecto, traslademos la situación descrita anteriormente en la fig. 3.1 a la fig. 3.2 pero reemplazando los puntos por números reales:

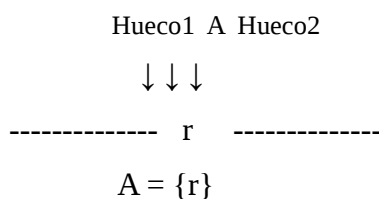


Fig. 3.2

En este caso r es un número real cualquiera. De nuevo, como en la anomalía 1, si no existiera un hueco entre r y su entorno más inmediato, se tendría que existe p en $\mathbb{R}$, con $r \neq p$, tal $|r-p| = 0$, pero esto significaría que $r = p$, lo cual es una contradicción, siendo esto una consecuencia directa de la primera anomalía. Así, la discontinuidad aritmética o numérica es de naturaleza esencial, desde el punto de vista ontológico, es decir es inherente al ser del número. Por otra parte, $|r-p|$ se puede hacer tan pequeño como se quiera, aunque nunca igual a cero, por lo que, como en el caso anterior, los huecos laterales mantienen sus características de no nulidad, así como la no poder ser expresables o cuantificables en términos de números reales positivos. Por lo que, nuevamente como en el caso de la anomalía 1, estos huecos se consideraron irrelevantes o inexistentes, dado que no se contaba para la época con las herramientas matemáticas rigurosas para su estudio, lo que allanó el camino para que la construcción de los números reales, como cuerpo numérico continuo, fuese admitida como un corpus teórico formal, riguroso y legítimo, sin mucha oposición. Sin embargo, ahora con las herramientas suministradas

por los números hiperreales infinitesimales, así como de algunos resultados pertinentes de la nueva teoría, se pueden detectar y examinar con más detalle las inconsistencias ocultas.

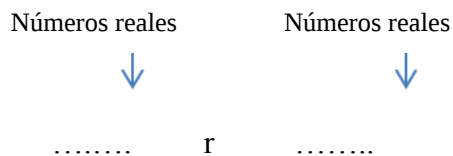


Fig. 3. 3

Como ya se ha explicado, r permanece aislado de su entorno numérico por una zona caracterizada por ser de longitud mayor que cero, pero al mismo tiempo menor que todo número real positivo, es decir:

$$|x-r| > 0 \text{ y } |x-r| < y,$$

para todo número real $x \neq r$ y todo número real $y > 0$. Evidentemente, esto es imposible de caracterizar en $\mathbb{R}$, pero sí en $\mathbb{R}^*$, pues esta condición la cumplen los infinitesimales hiperreales positivos. De hecho, la zona que rodea a r y que no contiene números reales adicionales, es precisamente el halo de r , definido en 2.4., el cual está constituido por los números hiperreales infinitesimalmente próximos a r : $\text{hal}(r) = \{h \text{ en } \mathbb{R}^* / h \approx r\}$.

Ahora bien, si el conjunto de números reales es equipotente a los puntos sobre la recta, entonces: ¿De dónde surgen estos espacios sobre la recta, que permiten albergar números distintos a los reales? De acuerdo a la teoría clásica, estos espacios no pueden existir, pues todos deberían estar ocupados totalmente por números reales. Sin embargo, existen y no se pueden negar. De hecho, ya no se puede recurrir a los argumentos del pasado, que negaban estos espacios o le restaban la debida importancia, pues estos proceden de construcciones matemáticas totalmente consistentes e irrefutables lógicamente, donde incluso se prueba que no tienen nada de insignificantes, pues la cardinalidad de los mismos puede ser igual a la de $\mathbb{R}$, es decir, $\aleph_1$, como es el caso, por ejemplo, de $\text{hal}(r)$.

Así, vemos que estos micro entornos numéricos hiperreales, que se encuentran sobre la recta, ponen en evidencia la existencia de zonas sobre la misma que no se corresponden con ningún número real. En otras palabras, **existen más puntos sobre la recta que números reales**.

Lo que es más contundente aun, *existen más puntos sobre la recta que números hiperreales* (por ser $\mathbb{R}^*$ un conjunto discontinuo), lo que aporta más evidencias en contra de la supuesta equipotencia de los números reales, con los puntos sobre la recta. A estas alturas, ya deberían ser suficientes las evidencias para poner en tela de juicio la supuesta equipotencia de $\mathbb{R}$ con los puntos sobre la recta, sin embargo, aún podemos incluir la siguiente, que por última no es menos importante.

3.2.1.- superdensidad vs continuidad

El que un conjunto numérico sea denso, no garantiza que sea continuo, como lo atestiguan los ejemplos de los conjuntos $\mathbb{Q}$ e I . De hecho pudiera ser, contrariamente a lo se supone, que dicha propiedad constituyese más bien un impedimento u obstáculo ontológico para la continuidad.

En efecto, si la densidad constituyera una condición necesaria o un requisito previo para la existencia de la continuidad en un conjunto numérico, y no un obstáculo ontológico para la misma, entonces se podría suponer de forma muy razonable, que si se lograra alcanzar un nivel superior y general de la propiedad, se podría eventualmente alcanzar la continuidad numérica, o que en su defecto, se disminuiría el grado de discontinuidad existente. De algún modo, este supuesto era en el que implícitamente se apoyaba la intuición de Dedekind, puesto que este consideraba que el problema de la discontinuidad de un conjunto, se resolvía agregándole nuevos objetos, hasta alcanzar la continuidad, o ausencia de lagunas. Afortunadamente para nuestros efectos, existe un caso concreto que puede ayudar a resolver la problemática planteada, y asimismo aportar nuevas evidencias en contra de la suposición de Dedekind, se trata de los conjuntos superdensos.

Según la definición 2.5., un conjunto totalmente ordenado X es superdenso, “...si dados A, B dos subconjuntos numerables de X , no simultáneamente vacíos, con $A < B$, existe siempre c en X tal que $A < \{c\} < B$.” De acuerdo a Takeuchi (1988), un conjunto superdenso cumple, entre otras, las siguientes propiedades: a) X es denso y b) X **no** es completo. Además, los ejemplos más emblemáticos de conjuntos superdensos lo constituyen los halos hiperreales y el

mismo conjunto $\mathbb{R}^*$.

De la propiedad a) podemos deducir que la superdensidad es una condición más fuerte y general que la densidad.

Por otro lado, sabemos que $\mathbb{R}^*$ es una extensión propia de $\mathbb{R}$, en tal sentido $\mathbb{R}^*$ se puede escribir como: $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup (H)$, donde $H = (\mathbb{R}^* - \mathbb{R}) \neq \emptyset$. Esto nos lleva a pensar en $\mathbb{R}^*$, como un conjunto que se formó a partir de $\mathbb{R}$, agregándole nuevos individuos numéricos (provenientes de H). Ahora bien, el hecho de que el conjunto resultante $\mathbb{R}^*$, por la propiedad b), sea un conjunto no completo (y por tanto discontinuo), nos lleva a concluir, contrariamente a lo que pensaba Dedekind, que:

1. El aumento del nivel de densidad de un conjunto M , no conduce necesariamente a la desaparición o disminución de las discontinuidades de M , sino que más bien a su aumento.
2. El agregar nuevos individuos a un conjunto M , con el fin de hacerlo continuo o eliminar los huecos existentes, parece tener más bien el efecto contrario, es decir, aumenta el número de discontinuidades. Esto tiene que ser así, por el hecho que, por cada nuevo individuo r que se agregue, se generan dos nuevos huecos al sistema original (ver figuras 2.2 y 2.3).
3. De las conclusiones anteriores se infiere que las discontinuidades numéricas o puntuales se comportan de forma contra-intuitiva, esto es, de forma contraria a lo que dicta el sentido común y la experiencia cotidiana, ya que todos las evidencias indican que la acción de agregar nuevos individuos numéricos o puntuales a uno dado, genera como resultado mayor cantidad de discontinuidades, que las existentes originalmente. Esto nos lleva a sospechar que, ***el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, no solamente es discontinuo, sino que tiene mayor cantidad de discontinuidades que $\mathbb{Q}$ e I por separado.***

Finalmente, podría surgir la siguiente pregunta: ¿Cuál sería la situación si el conjunto original no tiene huecos o discontinuidades? En principio, no debería afectar a la continuidad original, dado que todos los espacios posibles se encuentran llenos y no existe la posibilidad de

que sean desplazados. Pero, si el hecho de agregar nuevos individuos, pone en evidencia la existencia de espacios o discontinuidades ocultas (una continuidad ficticia), estaríamos precisamente en el caso que nos ocupa.

Para finalizar este apartado y como antesala al siguiente, podemos afirmar, de acuerdo a la evidencias aportadas, de que existen suficientes elementos de juicio para afirmar, como otrora lo hicieran Weyl y Brouwer en su momento, que la construcción clásica de los números reales como conjunto continuo, adolece de ciertas debilidades y anomalías, que ponen en entredicho su consistencia teórica. En tal sentido, como lo afirmamos en la introducción de este trabajo, se hace necesaria una revisión exhaustiva de los fundamentos del análisis real clásico, vía su replanteamiento y reconstrucción, lo que podría dar origen a sistemas alternativos, basados en la discontinuidad numérica.

En principio, un modelo discontinuo del cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales, podría decantarse en dos versiones principales:

1.- $\mathbb{R}$ como cuerpo discontinuo completo, en el cual se adoptaría, como en la versión clásica, el axioma de completitud. La ventaja en la adopción de esta versión, para efectos del análisis, es que contaría con lo mejor de los dos mundos, es decir, por una parte asumiría la discontinuidad y por el otro se mantendrían, si no todos, la mayoría de los resultados importantes del análisis real continuo, con las debidas y pertinentes variaciones, reinterpretaciones o generalizaciones imposibles de eludir en un escenario de discontinuidad. También se pondría en evidencia que la completitud clásica no es equivalente a la continuidad, pues en este escenario representarían distintas situaciones.

2.- $\mathbb{R}$ como cuerpo discontinuo no completo, en cuyo caso se estaría ante las puertas de un mundo totalmente desconocido o inexplorado, cuyas líneas de investigación emergentes serían muy variadas e insospechadas.

Cualquiera de las dos versiones, no obstante, requerirá la reinterpretación y generalización de los conceptos y definiciones básicas que constituyen la plataforma conceptual del análisis real, y en tal sentido a continuación se propone la siguiente alternativa.

4.- Plataforma conceptual básica para un análisis real discontinuo

En principio, todo subconjunto de números reales es discontinuo en este contexto, por ende no tiene sentido hablar de funciones continuas aquí; sin embargo eso no impide realizar un estudio análogo, pero en términos de contigüidad o acercamiento entre los huecos o discontinuidades subyacentes de un conjunto de referencia S . Esto amplía y enriquece el campo de estudio en esta área, permitiendo la introducción de una gran variedad de conjuntos que no tenían cabida en el modelo clásico y ampliando el radio de acción para un análisis real alternativo en un escenario numérico discontinuo.

Definición 4.1.- (Entorno Tipo I) Un δ entorno tipo I de un punto a de $\mathbb{R}$ es el conjunto de todos los puntos x de $\mathbb{R}$ tales que $|x - a| < \delta$, donde δ es cualquier número positivo dado. Un δ entorno reducido tipo I de a es el conjunto de todos los puntos de x tales que

$$0 < |x - a| < \delta,$$

esto es, donde a mismo es excluido.

El entorno tipo I se identifica directamente con el intervalo abierto $(a - \delta, a + \delta)$.

Definición 4.2.- (Entorno Tipo II) Sea a un número real y B un subconjunto **propio** de $(a - \delta, a + \delta)$, se dice que B es un entorno tipo II de a , si para todo $\beta < \delta$, existe x en B tal que

$$0 < |x - a| < \beta.$$

Como puede observarse, el entorno tipo II **no** es un intervalo.

El siguiente, es un ejemplo de entorno tipo II:

Sea $\mathbb{Q}$ el conjunto de los números racionales, entonces $B = \mathbb{Q} \cap (a - \delta, a + \delta)$, donde a es un número real cualquiera y δ un número positivo, es un entorno tipo II de a .

Hechas las aclaraciones anteriores se puede introducir, sin riesgo de confusión, la definición general de entorno, que engloba las dos anteriores.

Definición 4.3.- (Entorno General) Sea a un número real y B un subconjunto de $(a - \delta, a + \delta)$, se dice que B es un entorno de a , si para todo $\beta < \delta$, existe x en B tal que $|x - a| < \beta$.

Definición 4.4.- (Punto de acumulación tipo I) Sea S un subconjunto de números reales y x un número real, entonces x se llama punto de acumulación tipo I de S si cada δ – entorno tipo I contiene por lo menos un punto de S distinto de x .

La definición 4.4 corresponde a la definición clásica de punto de acumulación.

Definición 4.5.- (Punto de acumulación tipo II) Sea S un subconjunto de números reales y x un número real, entonces x se llama punto de acumulación tipo II de S si cada δ – entorno tipo II contiene por lo menos un punto de S distinto de x .

La definición de punto de acumulación general, naturalmente, queda establecida como:

Definición 4.6.- (Punto de acumulación general) Sea S un subconjunto de números reales y x un número real, entonces x se llama punto de acumulación de S si cada δ – entorno (general) contiene por lo menos un punto de S distinto de x .

Definición 4.7.- (Conjunto Contiguo Tipo I) Sea S un subconjunto de los números reales, se dice que S es un conjunto contiguo tipo I si es un intervalo.

Definición 4.8.- (Conjunto contiguo Tipo II) Sea S un subconjunto de los números reales, se dice que S es un conjunto contiguo tipo II, si todos sus puntos son de acumulación y no es contiguo tipo I.

En general, un conjunto es contiguo si es contiguo tipo I o II, es decir:

Definición 4.9.- (Conjunto contiguo general) Sea S un subconjunto de los números reales, se dice que S es un conjunto contiguo general, si todos sus puntos son de acumulación.

Todo conjunto de números reales, en este nuevo escenario, es esencialmente discontinuo, pero la categoría de contigüidad es designada para los conjuntos que cumplan las condiciones exigidas por las definiciones 4.7 y 4.8. Por ejemplo, el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales no es contiguo, en cambio $\mathbb{Q}$ sí lo es.

Definición 4.10.- Límite de una función en un punto $x = a$. Sea f una función real, se dice que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, si para todo $\varepsilon > 0$ existe un δ – entorno reducido B (tipo I, II o general), tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ siempre que $0 < |x - a| < \delta$, x en $B \cap \text{Dom}(f)$.

Esta definición generaliza la correspondiente clásica, en la cual sólo se admitía el entorno reducido tipo I. Así, por ejemplo, en este nuevo contexto se puede determinar el límite de $f(x) = x^2$ usando el entorno reducido, $B = (-1, 2) \cap \mathbb{Q}$, y probar que $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} x^2 = 2$.

Observe que $\sqrt{2}$ no pertenece a B . Lo que se quiere enfatizar con esto, y de hecho es lo que ocurre, es que la función accede mediante saltos a los puntos de su dominio y análogamente, a saltos, los procesa en sus imágenes, sólo que esos saltos son de naturaleza infinitesimal.

Por otra parte, otro concepto esencial que debe ser ajustado es el referido al de función continua en un punto y en un conjunto, lo cual en este contexto ya deja de tener sentido, por lo que en su lugar se adoptará uno que describa de algún modo la “densidad” de los huecos o discontinuidades de los conjuntos involucrados. En ese sentido, el término “contigüidad” en lugar de “continuidad” será el adoptado para tal fin.

Definición 4.11.- Función Contigua en un punto $x = a$. Sea f una función real, se dice que f es contigua en $x = a$, si existe un entorno B (tipo I, II o general) tal que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Si el entorno B es tipo I, la función se denominará función contigua tipo I, y será función contigua tipo II o general, si B es del tipo correspondiente.

La contigüidad tipo I corresponde a la continuidad en términos del modelo clásico, y en ese sentido mediante la contigüidad tipo II y general se amplía la definición.

Definición 4.12.- Función contigua en un conjunto. Sea f una función real y A un subconjunto de números reales, entonces se dice que f es contigua en A si es contigua en cada uno de sus puntos.

En lo que atañe a la definición de derivada, por otra parte, la definición clásica no difiere tanto de forma sino de fondo con la emergente. En efecto, a continuación se muestra la definición de derivada:

Definición 4.13.- Derivada de una función en un punto. Sea f una función real, $f: S \rightarrow \mathbb{R}$, se dice que f es derivable en el punto $x = a$ de S , si existe un entorno de a tal que:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

La forma de esta definición al parecer no difiere sustancialmente de la usual, sin embargo el entorno (tipo I, II o general) mencionado en la misma es un conjunto discontinuo, y en tal sentido constituye una generalización de la clásica.

Conclusiones y perspectivas

Si la genuina naturaleza de los conjuntos numéricos es la discontinuidad, constituye una torpeza tratar de ir en contra de los hechos. En lugar de ello, se debería estudiar con profundidad las inmensas posibilidades que un modelo de análisis real discontinuo, y por tanto más realista, tiene que ofrecer, no solo para la matemática, sino por las potenciales aplicaciones a otros campos de la ciencia, consustanciados con el estudio de los fenómenos esencialmente discontinuos del Universo. Fundamentalmente, se debe abandonar la concepción simplista e ingenua que se tiene sobre las “lagunas” o discontinuidades numéricas y/o puntuales, que las equipara con las discontinuidades del mundo físico.

En efecto, y a modo de hipótesis, existen razones muy fuertes para pensar que la naturaleza y comportamiento de las discontinuidades numéricas, difieren sustancialmente de las

materiales, a nivel macroscópico. Así, al parecer, cuando un número o punto r manifiesta su existencia, se forma a su alrededor una especie de “*campo de discontinuidad*”, de tal modo que ambos, número y campo, forman una unidad inseparable, a pesar de manifestarse en forma dual. El mencionado campo asociado a r , ontológicamente infranqueable, constituiría una especie de “huella dactilar”, siendo cada campo único e irrepetible. Es más, parece que existiera una extraña y fascinante analogía entre este comportamiento puntual o numérico, y el que manifiestan las partículas sub-atómicas, a nivel del mundo cuántico, las cuales pueden comportarse como ondas o como partículas. Otra analogía, también proveniente del mundo cuántico, que podría ayudarnos a darnos una idea más aproximada de lo que ocurre, estaría vinculada al fenómeno descrito por los electrones en movimiento, los cuales forman a su alrededor un campo magnético particular, siendo campo magnético y electrón, una entidad única de naturaleza dual. Así, en lo que a la matemática concierne, estaríamos hablando de un comportamiento dual, que podríamos designar como *dualidad punto-discontinuidad* o *dualidad número-discontinuidad*.

La comprobación de la hipótesis anterior, sería la prueba definitiva y concluyente sobre la imposibilidad de construir una continuidad numérica o puntual, esto es, de que la discontinuidad es ontológicamente inherente a los números y a los puntos. Por otra parte, pudiese ser que la hipótesis planteada constituya un tipo de verdad matemática que no puede ser probada, como lo contempla el *Teorema de Incompletitud* de Kurt Godel (1906-1978), en cuyo caso se podría aceptar axiomáticamente. De cualquier forma, su aceptación permitiría la apertura de nuevos e insospechados campos de investigación, basados en el estudio y caracterización de conjuntos y funciones discontinuos, donde se podrían tratar matemáticamente no solo los números reales $\mathbb{R}$, sino también sus campos discontinuos, $\mathbb{C}(x)$, asociados. Mediante este enfoque, por ejemplo, se podrían abordar los conjuntos y funciones discontinuos de naturaleza fractálica, holográfica, entre otros. En resumen, estaríamos a las puertas de un nuevo paradigma matemático, **el paradigma de discontinuidad**, que impactaría en todas las ramas de la matemática, particularmente en la teoría de ecuaciones diferenciales, topología, teoría de la medida, etc., y que incluso podría dar origen a nuevas ramas de la matemática.

Tema pendiente por resolver: Determinar las condiciones teóricas bajo las cuales, todos los teoremas del análisis real clásico se cumplen en el modelo discontinuo (En cuyo caso este

último se constituiría en una generalización formal del primero).

Referencias

Bell J. (2000). *Hermann Weyl sobre la intuición y el continuum*. *Philosophia Mathematica* (3), 8, 2000. Recuperado de [http://www. http://publish.uwo.ca/~jbell/Hermann%20Weyl.pdf](http://www.publish.uwo.ca/~jbell/Hermann%20Weyl.pdf).

Dedekind, Richard (1927). *Continuidad y Números Irracionales*. Quinta edición, 1927. Recuperado de <https://www.uv.es/~jkliment/Documentos/Dedekind.pc.pdf>.

Ferreirós, J (1998). En la Introducción de: *¿Qué son y para qué sirven los números?, y otros escritos sobre los fundamentos de la matemática*. Alianza Editorial, Madrid, 1998.

Goldblatt R. (1998). *Lectures on the Hiperreales. An Introduction to Nonstandard Analysis*. Springer-Verlag, New York, Inc., 1998.

Robinson A. (1966). *Non-standard Analysis*. Princenton, 1966.

Takeuchi Y. (1988). *Métodos Analíticos del Análisis no Standar*. Universidad Nacional de Colombia. Bogotá, Colombia, 1988.